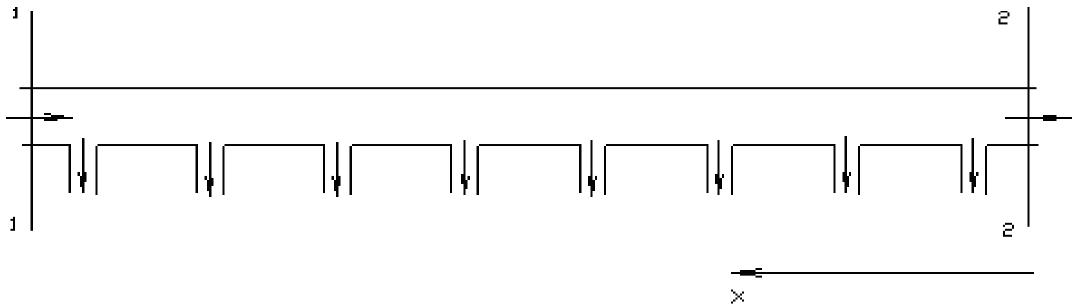
Leonardo Latella

VARIAZIONI GRADUALI DI PORTATA

Vi sono situazioni nelle quali una condotta è destinata ad erogare una parte o tutta la sua portata lungo un certo percorso come ad esempio le condotte utilizzate negli acquedotti per la distribuzione dell'acqua.



Supponiamo di avere una condotta a diametro costante D e lunghezza L dalla quale viene prelevata una portata qx lungo il percorso di lunghezza x (q è la portata erogata sull'unità di lunghezza). Infatti, per semplificare i calcoli, l'erogazione di portata lungo il percorso viene assimilata ad una erogazione uniformemente distribuita sull'unità di lunghezza della condotta. Indicando con Q_2 la portata e con H_2 il carico idraulico nella sezione terminale, la portata in una sezione generica distante x dalla sezione 2 vale:

$$Q = Q_2 + qx$$

Assumendo un asse delle x rivolto in senso opposto a quello della corrente e avente origine nella sezione 2, la perdita di carico distribuita lungo il tronco di lunghezza infinitesima dx compreso tra la sezione x +dx e quella x è espressa dalla

$$dH = \mathfrak{J} \cdot dx$$

dove dato che stiamo considerando una condotta a sezione circolare si ha che

$$\mathfrak{J} = \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 D^5}$$

quindi

$$dH = \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 D^5} dx$$

integrando tra la sezione iniziale e quella finale si ha

$$\int_{H_2}^{H_1} dH = \int_0^L \frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 D^5} dx$$

da cui

$$\int_{H_2}^{H_1} dH = \int_0^L \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5} \left[\left(Q_2^2 + 2Q_2 qx + q^2 x^2\right)\right] dx$$

$$H_1 - H_2 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}\left[\left(Q_2^2 x + Q_2 q x^2 + \frac{q^2 x^3}{3}\right)\right]_0^L \qquad \textbf{(1)}$$

$$H_1 - H_2 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}\left(Q_2^2 L + Q_2 q L^2 + \frac{q^2 L^3}{3}\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Se la portata in arrivo è completamente distribuita lungo il percorso allora $Q_2 = 0$ cioè $Q = qL$ quindi

$$H_1 - H_2 = \frac{1}{3}\frac{8\lambda q^2 L^3}{g\pi^2 D^5} = \frac{1}{3}\frac{8\lambda (qL)^2}{g\pi^2 D^5} L = \frac{1}{3}\frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 D^5} L$$

cioè la perdita di carico è pari a 1/3 di quella che si verificherebbe nella stessa condotta percorsa per tutta la sua lunghezza dalla portata iniziale Q (cioè in assenza di erogazioni).

Per quanto riguarda il valore della quota piezometrica $\zeta = H - \frac{U^2}{2g}$ si ha

$$\zeta_1 - \zeta_2 = H_1 - \frac{U_1^2}{2g} - \left(H_2 - \frac{U_2^2}{2g}\right) = H_1 - H_2 - \frac{1}{2g}\left(U_1^2 - U_2^2\right)$$

la sezione della condotta è circolare quindi

$$\frac{1}{2g}\left(U_1^2 - U_2^2\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16}} - \frac{Q_2^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16}}\right) = \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left(Q^2 - Q_2^2\right) = \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left[(Q_2 + qL)^2 - Q_2^2\right]$$

tenendo conto della **(2)** si ha

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}\left(Q_2^2 L + Q_2 q L^2 + \frac{q^2 L^3}{3}\right) - \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left[(Q_2 + qL)^2 - Q_2^2\right]$$

Dalla **(1)** si vede che integrando tra una generica sezione x e la sezione finale (x=0) si ottiene

$$H_x - H_2 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}\left(Q_2^2 x + Q_2 q x^2 + \frac{q^2 x^3}{3}\right)$$

e dato che

$$\frac{1}{2g}\left(U_x^2 - U_2^2\right) = \frac{1}{2g}\left(\frac{(Q_2 + qx)^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16}} - \frac{Q_2^2}{\frac{\pi^2 D^4}{16}}\right) = \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left[(Q_2 + qx)^2 - Q_2^2\right]$$

si ha

$$\zeta_x - \zeta_2 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}\left(Q_2^2 x + Q_2 q x^2 + \frac{q^2 x^3}{3}\right) - \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left[(Q_2 + qx)^2 - Q_2^2\right]$$

Se $Q_2 = 0$ la quota piezometrica raggiunge un valore pari a quello che si ha nella sezione terminale alla distanza dall'estremità di valle $x = \frac{3D}{\lambda}$. Infatti

$$0 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5}\left(\frac{q^2 x^3}{3}\right) - \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left(q^2 x^2\right)$$

da cui

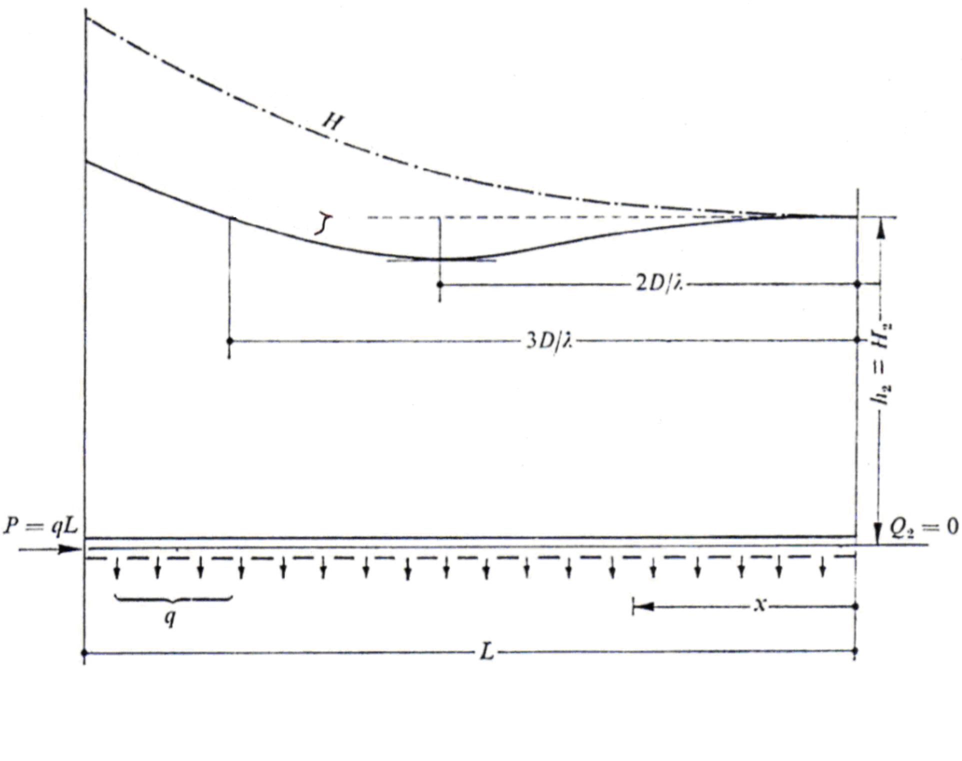
$$\frac{8q^2 x}{g\pi^2 D^4}\left(\frac{\lambda}{3D}x - 1\right) = 0$$

le cui soluzioni sono x=0 e $x = \frac{3D}{\lambda}$.

Procedendo verso valle il valore della quota piezometrica diminuisce fino a raggiungere un minimo in corrispondenza a $x^* = \frac{2D}{\lambda}$. Per individuare x^* basta trovare il massimo della funzione $\zeta_x - \zeta_2$; derivando la sua espressione rispetto a x e ponendo tale derivata uguale a zero si ottiene

$$\frac{8\lambda}{g\pi^2 D^5} q^2 x^2 - \frac{8}{g\pi^2 D^4}\left(2q^2 x\right) = 0$$

da cui si ricava il valore $x^* = \frac{2D}{\lambda}$. Da questa sezione la quota piezometrica cresce nel senso del moto fino al valore finale $\zeta_2 = H_2$. Gli andamenti del carico e della quota piezometrica sono riportati nella figura sottostante (Marchi Rubatta - Meccanica dei fluidi - UTET).



DEFINIZIONI

- **Descrizione Lagrangiana**

In tale descrizione l'attenzione è focalizzata sul vettore posizione che istante per istante unisce l'origine del sistema di riferimento con il punto mobile centro della particella infinitesima considerata. Le componenti di questo vettore sono date da tre funzioni del tempo e di tre variabili che sono le coordinate del punto all'istante preassegnato t_0; queste quattro variabili sono dette variabili di Lagrange:

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$y = y(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

Volendo mettere in evidenza la distribuzione di una qualsiasi grandezza fisica (pressione, temperatura, densità, etc) nel mezzo continuo seguendo tale descrizione si può quindi scrivere:

$$b = f(x_0, y_0, z_0, t)$$

Tale funzione fornisce istante per istante il valore della grandezza fisica b nel punto occupato in quell'istante dalla particella che all'istante t_0 occupava il punto di coordinate x_0, y_0, z_0.

- **Descrizione Euleriana**

In tale descrizione si fa riferimento a un generico punto fisso nello spazio, di coordinate x, y, e z, durante il trascorrere del tempo.
Volendo indicare la velocità del centro della particella che all'istante t si trova a passare per quel punto fisso, si scriveranno le componenti in questo modo:

$$u = f_1(x, y, z, t)$$
$$v = f_2(x, y, z, t)$$
$$w = f_3(x, y, z, t)$$

x, y, z e t sono dette variabili di Eulero.
La distribuzione di una qualsiasi grandezza fisica nel mezzo continuo seguendo questa descrizione la si indica con la relazione:

$$b = \lambda(x, y, z, t)$$

che fornisce il valore della grandezza b all'istante t nel generico punto fisso di coordinate x, y e z.

- **Traiettoria**

  Fissiamo un punto materiale P e seguiamolo nel suo movimento. Il punto P occuperà una serie di punti dello spazio che potremo congiungere con una linea detta traiettoria. Negli istanti t e t' il punto P occuperà le due posizioni P e P'; le velocità in tali punti sono tangenti alla traiettoria.

- **Linea di flusso**

  Se si fissa un certo istante di tempo t* e si ipotizza di conoscere la velocità in tutti i punti del campo del moto, la linea di corrente è quella curva tangente, in ogni suo punto, al vettore velocità in quel punto.

- **Moto uniforme**

  Le condizioni affinché il moto di un fluido sia uniforme sono:

  $\frac{\partial *}{\partial t} = 0$ cioè nel tempo non si hanno variazioni di una qualunque grandezza fisica ***** e
  $\frac{\partial *}{\partial x} = 0$ cioè non si hanno variazioni delle grandezze cinematiche ***** lungo il moto (con x ho

  indicato la direzione del moto).
  I moti uniformi sono tutti quelli nei quali le caratteristiche del moto si mantengono identiche nei successivi punti di ogni traiettoria; affinché ciò possa avvenire le traiettorie devono essere rettilinee.

- **Moto permanente**

  E' un moto caratterizzato dal fatto che nessuna grandezza fisica dipende dal tempo.